MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 3 heures

PROBLÈME

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$ et on définit la fonction f, sur I, par

$$\forall x \in I, \quad x \xrightarrow{f} f(x) = \int_1^x \frac{[t]}{t}\, dt$$

où $[t]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à t.

1° Montrer, sans calcul, que f est continue sur I;

2° Montrer, sans la calculer, que la fonction f est dérivable en tout point non entier de I et non dérivable en tout point entier de I, différent de 1.

3° Calculer $f(n)$, pour tout entier au moins égal à 1.

Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle [1, 4]. On étudiera sa concavité.

4° Montrer que l'on a l'inégalité

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n-1} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \geqslant n - 1 - \ln(n),$$

où ln désigne le logarithme népérien.

5° On définit la fonction g, sur I, par

$$g(x) = \prod_{k=1}^{[x]} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \quad x \in I$$

le signe Π désignant le produit des facteurs.

Quels sont les points de discontinuité de la fonction g ?

6° Quelle est la limite de $g(x)$ pour x tendant vers $+\infty$?

7° Quelle est la limite du quotient $\dfrac{g(x+1)}{g(x)}$, pour $x \to +\infty$?

8° Soient $h \in]0, 1[$ et g_h la fonction définie sur I par $g_h(x) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$.

Montrer que la fonction g_h n'a pas de limite pour $x \to +\infty$.

9° Soient $h \in \mathbb{R}^+$ et g_h la fonction définie, comme précédemment, par

$$g_h(x) = \frac{g(x+h)}{g(x)}.$$

Pour quelles valeurs de $h \in \mathbb{R}^+$, la fonction g_h a-t-elle une limite pour $x \to +\infty$, et, lorsque cette limite existe, donner sa valeur.

10° Tracer le graphe de la fonction $g_{1/2}$ sur l'intervalle [1, 4]. On donnera les valeurs de $g_{1/2}$ en ses points de discontinuité, sur ce même intervalle, ainsi que l'allure du graphe de $g_{1/2}$ sur l'intervalle I.

Les graphes seront tracés sur papier millimétré. Échelle : 1 = 5 cm.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail